УДК 629.735

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ АВИОНИКИ КАК МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

С.В. КУЗНЕЦОВ

Техническая эксплуатация самолета и его авионики рассматривается как процесс с последовательной сменой состояний эксплуатации. Предложены модели процессов и систем технической эксплуатации авионики в виде стационарных и нестационарных марковских цепей первого и высшего порядков. Приведены примеры для процессов эксплуатации из двух состояний – работоспособного и неработоспособного.

Ключевые слова: математические модели, процессы и системы, техническая эксплуатация, авионика, марковские цепи.

Модели процессов и систем технической эксплуатации авионики

Для нового поколения воздушных судов (ВС) прочно утвердился новый термин, обозначающий большую группу приборных и радиотехнических объектов - ***авионика***. Толкования этого термина в отечественных нормативных документах по-прежнему не существует.

Под *авионикой* в широком смысле можно понимать область технических наук, связанную с разработкой, производством и эксплуатацией авиационного электронного и автоматического оборудования. Такое определение авионики дается в справочнике АТА [1].

В узком смысле под *авионикой* можно понимать бортовое электронное оборудование, т.е. любое электронное устройство, включая его электрическую часть, предназначенное для использования на борту ВС, в том числе радиооборудование, систему автоматического управления полетом и приборное оборудование. Такое определение авионики приводится в руководящих документах ИКАО [2]. Анализ структуры современных комплексов и систем авионики воздушных судов гражданской авиации приведен в [3]. Основы теории технической эксплуатации пилотажно-навигационного оборудования (ПНО) как составной части авионики изложены в [4].

Система технической эксплуатации авионики (СТЭ) ВС - это совокупность объектов и средств технической эксплуатации, программ технического обслуживания и ремонта, а также персонала, осуществляющего процедуры и организующего процессы технической эксплуатации авионики.

Качество СТЭ ПНО проявляется в *процессе ТЭ* - совокупности процессов использования по назначению, эксплуатационного контроля, технического обслуживания, восстановления и ремонта.

Техническую эксплуатацию самолета и его авионики можно рассматривать как процесс с последовательной сменой *состояний эксплуатации.* В качестве таких состояний при использовании по назначению могут быть выделены состояния работоспособности, исправности, неисправности и неработоспособности. Состояниями эксплуатационного контроля авионики являются состояния контроля в полете, послеполетного и предполетного контроля и контроля демонтированного оборудования для работоспособного, исправного, неработоспособного или неисправного. Аналогичным образом могут быть выделены состояния оперативного и периодического ТО, аварийного и профилактического восстановления, состояния ремонта. При необходимости исследования процессов в реальном масштабе времени необходимо рассмотрение состояний ожидания, простоя и хранения.

Процесс ТЭ как процесс смены состояний ТЭ протекает во времени под воздействием множества факторов, имеющих случайный и неслучайный характер. К ним относятся появление отказов и неисправностей, качество ТОиР, достоверность средств контроля, обеспеченность ЗИП и т.д. Переходы процесса ТЭ из состояния в состояние происходят как в случайные, так и в детерминированные моменты времени. Такие переходы порождаются потоками событий (например, потоками отказов, восстановлений, процедур контроля и т.д.). То есть процесс ТЭ можно рассматривать как случайный процесс, определяемый на множестве состояний эксплуатации вероятностными характеристиками переходов. Это позволяет решать задачи анализа процесса и системы ТЭ авионики с помощью хорошо разработанного аппарата теории случайных процессов.

Процесс ТЭ авионики по своей сути является управляемым процессом. Возможность вмешательства в этот процесс носит как объективный детерминированный характер, обусловленный руководством по эксплуатации и программой ТОиР авионики, так и субъективный случайный характер, обусловленный неправомерными или ошибочными действиями летно-технического и инженерно-технического состава (ЛТС и ИТС).

Марковская цепь (МЦ) - это случайный процесс с дискретным временем, отличительной особенностью которого является полная или частичная независимость эволюций от прошлого. Простейшей МЦ является стационарная МЦ 1-го порядка (СМЦ), эволюции которой не зависят ни от прошлых эволюций, ни от времени. Другой разновидностью МЦ является нестационарная МЦ 1-го порядка (НСМЦ), эволюции которой не зависят от прошлых эволюций, но зависят от времени. Обобщением СМЦ являются цепи высших порядков (СМЦВП), эволюции которых частично или полностью зависят от предыдущих эволюций. Наиболее сложными объектами теории МЦ являются нестационарные МЦ высших порядков (НСМЦВ), эволюции которых зависят как от предыдущих эволюций, так и от моментов времени, когда эти эволюции совершались. Таким образом, мы имеем четыре основных разновидности МЦ.

По мере усложнения моделей МЦ, выбранных для описания тех или иных реальных процессов технической эксплуатации, возрастает их степень адекватности, но усложняется математический аппарат и возрастают трудности со статистикой, необходимой для описания моделей. Объем статистики значительно увеличивается. В связи с этим в каждом конкретном случае приходится выбирать компромисс, чтобы математическая модель достаточно точно описывала исследуемый процесс, и объемы математических расчетов были бы приемлемы.

Марковские цепи как модели процессов технической эксплуатации

Определение марковской цепи. Задание марковской цепи начинается с задания множества ее состояний S. В общем случае это множество может быть счетным. Мы ограничимся рассмотрением конечного S размерности n

$$\mathbf{S} = \left\{S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots, S_j, \cdots, S_n\right\}. \qquad (1)$$

В начальный момент времени $l = 0$ должно быть задано распределение вероятностей состояний

$$\mathbf{P}^{(0)} = \left\{P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \cdots, P_i^{(0)}, \cdots, P_j^{(0)}, \cdots, P_n^{(0)}\right\}, \qquad (2)$$

причем $\sum_{i=1}^{n} P_i^{(0)} = 1$.

Верхний индекс в скобках здесь и далее будет обозначать момент времени. В частном случае $\mathbf{P}^{(0)}$ может представлять собой вырожденный единичный вектор

$$\mathbf{P}^{(0)} = \left\{0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0\right\}. \qquad (3)$$

Если в момент времени l цепь находится в состоянии $S_i \in \mathbf{S}$, то последующая эволюция СМЦ задается матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{P}_1^S = \left\{p(S_j / S_i), S_j, S_i \in \mathbf{S}\right\}, \qquad (4)$$

элементы которой зависят только от текущего состояния S_i и не зависят от предыдущих эволюций и момента времени l. Таким образом, мы определили стационарную марковскую цепь 1-го порядка, которая представляет собой совокупность

$$\xi_1^S = \left\{ \mathbf{S}, \mathbf{P}^{(0)}, \mathbf{P}_1^S \right\}. \quad (5)$$

Реализация СМЦ ξ_1^S имеет вид

$$h_{\xi_1^S}(m) = S_{i_0}^{(0)}, S_{i_1}^{(1)}, \cdots, S_{i_m}^{(m)}. \quad (6)$$

Номер шага марковской цепи служит временным параметром. Запись $S_{i_m}^{(m)}$ означает состояние цепи $S_{i_0} \in \mathbf{S}$ в момент времени m. Реализации $h_{\xi_1^S}(m)$ соответствует вероятность

$$P\left\{ h_{\xi_1^S}(m) \right\} = P_{i_0}^{(0)} p(S_{i_1}^{(1)} / S_{i_0}^{(0)}) \cdots p(S_{i_m}^{(m)} / S_{i_{m-1}}^{(m-1)}). \quad (7)$$

Обозначим через $p^{(m)}(S_j / S_i)$ условную вероятность попадания СМЦ в состояние S_j на m-м шаге, если начальным состоянием было S_i. Она равна сумме вероятностей всех реализаций длины m, начинающихся в S_i и заканчивающихся в S_j. В частности, $p^{(1)}(S_j / S_i) = p\ (S_j / S_i)$,

$$p^{(2)}(S_j / S_i) = \sum_{k=1}^{n} p\ (S_k / S_i) p\ (S_j / S_k). \quad (8)$$

По индукции получаем общую рекуррентную формулу Колмогорова-Чепмена для СМЦ

$$p^{(m)}(S_j / S_i) = \sum_{k=1}^{n} p^{(1)}(S_k / S_i) p^{(m-1)}(S_j / S_k). \quad (9)$$

Уравнение (9) отражает тот факт, что первые l шагов приводят СМЦ в состояние S_k и что вероятность последующего перехода из S_k в S_j не зависит от того, каким образом было достигнуто S_k.

Из (9) следует, что безусловную вероятность попадания в состояние S_j на m-м шаге можно определить с помощью следующей рекуррентной формулы

$$P^{(m)}(S_j) = \sum_{k=1}^{n} P^{(0)}(S_k) p^{(m)}(S_j / S_k). \quad (10)$$

Состояние S_j достижимо из состояния S_i, если существует такое $m \geq 0$, что $p^{(m)}(S_j / S_k) > 0$, т.е. если имеется положительная вероятность попасть из состояния S_i в состояние S_j. Марковская цепь является неприводимой, когда каждое ее состояние достижимо из любого другого состояния. Обозначим через $f^{(m)}(S_j / S_k)$ вероятность того, что в начинающемся из S_i процессе первое попадание в S_j произойдет на m-м шаге. Положим $f^{(0)}(S_j / S_i) = 0$ и

$$f^{(\infty)}(S_j / S_i) = \sum_{l=1}^{\infty} f^{(l)}(S_j / S_i). \quad (11)$$

Вероятность $f^{(\infty)}(S_j / S_i)$ – есть вероятность того, что, выходя из S_i, процесс когда-нибудь пройдет через S_j.

Для вычисления $f^{(m)}(S_j / S_i)$ воспользуемся следующими рассуждениями. Если первое достижение S_j осуществляется при l- м переходе $(1 \leq l \leq m-1)$, то условная вероятность попадания в S_j при m-м переходе будет равна $p^{(m-1)}(S_j/S_i)$. Принимая во внимание, что $p^{(0)}(S_j/S_i)=1$, получим

$$p^{(m)}(S_j/S_i)=\sum_{l=1}^{m} f^{(l)}(S_j/S_i)p^{(m-l)}(S_j/S_i). \quad (12)$$

Последовательно полагая $l=1,2,\cdots,n$, мы по формуле (12) получим значения $p^{(l)}(S_j/S_i)$, которые подставим в (11) и последовательно получим $f^{(l)}(S_j/S_i), l=\overline{1,m}$.

Тогда среднее время возвращения процесса $\mu(S_j)$ в состояние S_j можно определить следующим образом

$$\mu(S_j)=\sum_{l=1}^{\infty} lf^{(l)}(S_j/S_i). \quad (13)$$

Состояние S_j возвратно, если $f^{(\infty)}(S_j/S_i)=1$, и невозвратно, если $f^{(\infty)}(S_j/S_i)<1$. Состояние S_j имеет период $t>1$, если $p^{(m)}(S_j/S_i)=0$, когда m не является кратным t и t - наибольшее целое число, обладающее этим свойством. Состояние S_j является непериодическим, если такого $t>1$ не существует. Непериодическое возвратное состояние S_j, у которого $\mu(S_j)<\infty$, является эргодическим.

Весьма важным является следующий результат. В неприводимой эргодической цепи существуют не зависящие от начального состояния S_i пределы

$$\pi(S_j)=\lim p^{(m)}(S_j/S_i), \quad (14)$$

причем $\pi(S_j)>0$ и

$$\pi(S_j)=\sum_{i=1}^{n}\pi(S_i)p(S_j/S_i),\ S_j\in\mathbf{S}, \quad (15)$$

где

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(S_i)=1,$$

$$\mu(S_j)=1/\pi(S_j).$$

Распределение вероятностей $\{\pi(S_j)\}$ является стационарным распределением вероятностей состояний МЦ.

Для нестационарной марковской цепи матрица переходных вероятностей принимает следующий вид

$$\mathfrak{R}_1^{NS}=\left\{P_1^{NS}, l=\overline{0,m}\right\}, \quad (16)$$

где $\mathbf{P}_l^{NS}=\left\{p(S_j/S_i,l), S_i,S_j\in\mathbf{S}\right\}$ - матрицы, элементы которых зависят от моментов времени l.

Таким образом, НСМЦ 1-го порядка представляет собой совокупность

$$\xi_1^{NS}=\left\{\mathbf{S},\mathbf{P}^{(0)},\mathfrak{R}_1^{NS}\right\}. \quad (17)$$

Реализации $h_{\xi_1^{NS}}(m)$ соответствует вероятность

$$P\{h_{\xi_1^{NS}}(m)\}=P_{i_0}^{(0)}p(S_{i_1}^{(1)}/S_{i_0}^{(0)},0)\cdots p(S_{i_m}^{(m)}/S_{i_{m-1}}^{(m-1)},m-1). \quad (18)$$

Условная вероятность $p^{(m)}(S_j/S_i,m)$ попадания НСМЦ в состояние S_j на m-м шаге, если начальным состоянием было S_i, равна сумме вероятностей всех реализаций длины m, начинающихся в S_i и заканчивающихся в S_j:

$$p^{(1)}(S_j/S_i,1)=p\ (S_j/S_i,1); \qquad (19)$$

$$p^{(2)}(S_j/S_i,2)=\sum_{k=1}^{n}p^{(1)}(S_k/S_i,1)p\ (S_j/S_k,2).$$

Далее по индукции получаем общую рекуррентную формулу Колмогорова-Чепмена для НСМЦ

$$p^{(m)}(S_j/S_i,m)=\sum_{k=1}^{n}p^{(1)}(S_k/S_i,1)p^{(m-1)}(S_j/S_k,m-1). \qquad (20)$$

Безусловная вероятность попадания НСМЦ в состояние S_j на m-м шаге определяется следующим образом

$$p^{(m)}(S_j,m)=\sum_{k=1}^{n}p^{(0)}(S_k,1)p^{(m)}(S_j/S_k,m). \qquad (21)$$

Обозначим через $f^{(m)}(S_j/S_i,m)$ вероятность того, что в начинающемся из S_i нестационарном процессе первое попадание в S_j произойдет на m-м шаге. Для вычисления этой вероятности воспользуемся по аналогии с СМЦ выражением (12)

$$p^{(m)}(S_j/S_i,m)=\sum_{k=1}^{n}f^{(1)}(S_j/S_i,1)p^{(m-1)}(S_j/S_k,m-1). \qquad (22)$$

Тогда среднее время возвращения нестационарного процесса $\mu_{\xi_1^{NS}}(S_j)$ в состояние S_j определяется следующим образом

$$\mu_{\xi_1^{NS}}(S_j)=\sum_{l=1}^{\infty}lf^{(1)}(S_j/S_i,1)\cdot \qquad (23)$$

Рассмотрим теперь марковскую стационарную цепь k-го порядка. Она задается совокупностью

$$\xi_k^S=\left\{\mathbf{S},\mathbf{P}^{(0)},\mathfrak{R}_k^S\right\}, \qquad (24)$$

где $\mathfrak{R}_k^S=\left\{P_1^S,l=\overline{1,k}\right\}$ - совокупность матриц переходных вероятностей от 1-го до k-го порядка, элементы которых

$$P_l^S=\left\{p(S_{i_l}/S_{i_{l-1}},\dots,S_{i_0}),S_{i_l},S_{i_{l-1}},\dots,S_{i_0}\in\mathbf{S}\right\} \qquad (25)$$

зависят от предыдущих l состояний.

Реализации $h_{\xi_k^S}(m)$ соответствует вероятность

$$P\{h_{\xi_1^S}(m)\}=P_{i_0}^{(0)}p(S_{i_1}^{(1)}/S_{i_0}^{(0)})\cdots p(S_{i_k}^{(k)}/S_{i_{k-1}}^{(k-1)},\dots,S_{i_0}^{(0)})\dots p(S_{i_k}^{(m)}/S_{i_{m-1}}^{(m-1)},\dots,S_{i_{m-k}}^{(m-k)})\,. \qquad (26)$$

Обозначим через $p^{(m)}(S_{i_m}/S_{i_{m-1}},\dots,S_{i_{m-k}})$ условную вероятность попадания СМЦВ в состояние S_{i_m} на m-м шаге, если начальным состоянием в момент времени $(m-k)$ было $S_{i_{m-k}}$:

$$p^{(1)}(S_j/S_i)=p\ (S_{i_1}/S_{i_0});$$

$$p^{(2)}(S_{i_2}/S_{i_1},S_{i_0})=\sum_{i_1=1}^{n}p^{(1)}(S_{i_1}/S_{i_0})p\ (S_{i_2}/S_{i_1},S_{i_0});$$

$$\dots$$

$$p^{(k)}(S_{i_k}/S_{i_{k-1}},\dots,S_{i_0})=\sum_{i_{k-1}=1}^{n}p^{(k-1)}(S_{i_k}/S_{i_{k-1}},\dots,S_{i_0})p\ (S_{i_k}/S_{i_{k-1}},\dots,S_{i_0});$$

$$\dots$$

$$p^{(m)}(S_{i_m}/S_{i_{m-1}},\dots,S_{i_{m-k}})=\sum_{i_{m-1}=1}^{n}p^{(m-1)}(S_{i_{m-1}}/S_{i_{m-2}},\dots,S_{i_{m-k}})p\ (S_{i_m}/S_{i_{m-1}},\dots,S_{i_{m-k}}). \qquad (27)$$

Если $k = m$, то получаем стационарную немарковскую цепь, переходы которой зависят от всех предыдущих эволюций.

Из (27) следует, что безусловная вероятность попадания в состояние S_{i_m} на m-м шаге можно определить с помощью следующей рекуррентной формулы

$$P^{(m)}(S_{i_m}) = \sum_{i_0=1}^{n} P^{(0)}(S_{i_0}) p^{(m)}(S_{i_m} / S_{i_{m-1}}, ..., S_{i_0}). \quad (28)$$

Обозначим через $f^{(m)}(S_{i_m} / S_{i_{m-1}}, ..., S_{i_0})$ вероятность того, что в начинающемся из S_{i_0} процессе первое попадание в S_{i_m} произойдет на m-м шаге. Для этой вероятности справедливо выражение

$$f^{(m)}(S_{i_m} / S_{i_{m-1}}, ..., S_{i_0}) = \sum_{l=1}^{n} f^{(l)}(S_{i_m} / S_{i_{m-1}}, ..., S_{i_0}) p^{(m-l)}(S_{i_m} / S_{i_{m-1}}, ..., S_{i_0}). \quad (29)$$

Тогда среднее время возвращения $\mu_{\xi_1^{NS}}(S_i)$ СМЦВ в состояние S_i определяется следующим образом

$$\mu_{\xi_1^{NS}}(S_i) = \sum_{l=1}^{\infty} l f^{(l)}(S_{i_l} / S_{i_{l-1}}, ..., S_{i_{l-k}}). \quad (30)$$

В заключение рассмотрим нестационарную марковскую цепь k-го порядка. Она задается совокупностью

$$\xi_k^{NS} = \left\{ \mathbf{S}, \mathbf{P}^{(0)}, \mathfrak{R}_k^{NS}(l) \right\}, \quad (31)$$

где $\mathfrak{R}_k^{NS} = \left\{ P_r^S(l), l = \overline{1, m}; r = \overline{1, k} \right\}$ - совокупность матриц переходных вероятностей от 1-го до k-го порядка, элементы которых зависят от предыдущих k состояний и от моментов времени l

$$P_r^{NS}(l) = \left\{ p(S_{i_k} / S_{i_{k-1}}, l_{k-1}, ..., S_{i_0}, l_0), S_{i_k}, S_{i_{k-1}}, ..., S_{i_0} \in \mathbf{S} \right\}. \quad (32)$$

Реализации НСМЦВ $h_{\xi_k^{NS}}(m)$ соответствует вероятность

$$P\{h_{\xi_1^{NS}}(m)\} = P_{i_0}^{(0)} p(S_{i_1}^{(1)} / S_{i_0}^{(0)}, 0) \cdots p(S_{i_k}^{(k)} / S_{i_{k-1}}^{(k-1)}, (k-1), ..., S_{i_0}^{(0)}, 0) ... p(S_{i_k}^{(m)} / S_{i_{m-1}}^{(m-1)}, (m-1), ..., S_{i_{m-k}}^{(m-k)}, (m-k)) . \quad (33)$$

Таким образом, мы рассмотрели основные разновидности марковских цепей как возможных моделей процессов технической эксплуатации авионики.

Стационарная марковская модель процесса технической эксплуатации

Определение аналитических функций интенсивности отказов и вероятности безотказной работы авионики по статистическим данным приведено в [5]. Пусть объект эксплуатации может находиться в 2-х состояниях: S_1 – работоспособное состояние использования по назначению; S_2 – неработоспособное состояние, в котором проводится восстановление работоспособности.

В момент времени $l = 0$ объект находится в S_2, т.е. $P^{(0)} = (0,1)$. Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P_1^S = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определим вероятности попадания объекта в состояния S_1 и S_2 за 4 шага:

$p^{(1)}(S_1/S_2)=1,$

$p^{(1)}(S_2/S_2)=0;$

$p^{(2)}(S_1/S_2)=p^{(1)}(S_1/S_2)p(S_1/S_2)+p^{(1)}(S_2/S_2)p(S_1/S_2)=0{,}99;$

$p^{(2)}(S_2/S_2)=p^{(1)}(S_1/S_2)p(S_1/S_2)+p^{(1)}(S_2/S_2)p(S_2/S_2)=0{,}01;$

$p^{(3)}(S_1/S_2)=p^{(2)}(S_1/S_2)p(S_1/S_1)+p^{(2)}(S_2/S_2)p(S_1/S_2)=0{,}9901;$

$p^{(3)}(S_2/S_2)=p^{(2)}(S_1/S_2)p(S_1/S_2)+p^{(2)}(S_2/S_2)(S_2/S_2)=0{,}0099;$

$p^{(4)}(S_1/S_2)=p^{(3)}(S_1/S_2)p(S_1/S_1)+p^{(3)}(S_2/S_2)p(S_1/S_2)=0{,}990099;$

$p^{(4)}(S_2/S_2)=p^{(3)}(S_1/S_2)p(S_1/S_2)+p^{(3)}(S_2/S_2)(S_2/S_2)=0{,}009901.$

Определим безусловные вероятности попадания объекта в состояния S_1 и S_2 за 4 шага:

$p^{(1)}(S_1)=p^{(0)}(S_1)p(S_1/S_1)+p^{(0)}(S_2)p(S_1/S_2)=1;$

$p^{(1)}(S_2)=0;$

$p^{(2)}(S_1)=p^{(1)}(S_1)p(S_1/S_1)+p^{(1)}(S_2)p(S_1/S_2)=0{,}99;$

$p^{(2)}(S_2)=0{,}01;$

$p^{(3)}(S_1)=p^{(2)}(S_1)p(S_1/S_1)+p^{(2)}(S_2)p(S_1/S_2)=0{,}9901;$

$p^{(3)}(S_2)=0{,}0099;$

$p^{(4)}(S_1)=p^{(3)}(S_1)p(S_1/S_1)+p^{(3)}(S_2)p(S_1/S_2)=0{,}990099;$

$p^{(4)}(S_2)=0{,}009901.$

Вычислим вероятности того, что в начавшемся в состоянии S_2 процессе первое попадание в S_2 произойдет на $l=\overline{1,4}$ шаге:

$$f^{(1)}(S_2/S_2)=\frac{p^{(1)}(S_2/S_2)}{p^{(0)}(S_2/S_2)}=0;$$

$$f^{(2)}(S_2/S_2)=\frac{p^{(2)}(S_2/S_2)-f^{(1)}(S_2/S_2)p^{(1)}(S_2/S_2)}{p^{(0)}(S_2/S_2)}=0{,}01;$$

$$f^{(3)}(S_2/S_2)=\frac{\left\{p^{(3)}(S_2/S_2)-f^{(1)}(S_2/S_2)p^{(2)}(S_2/S_2)-f^{(2)}(S_2/S_2)p^{(1)}(S_1/S_2)\right\}}{p^{(0)}(S_2/S_2)}=0{,}0099;$$

$$f^{(4)}(S_2/S_2)=\frac{\left\{p^{(4)}(S_2/S_2)-f^{(1)}(S_2/S_2)p^{(3)}(S_2/S_2)-f^{(2)}(S_2/S_2)p^{(2)}(S_1/S_2)-f^{(3)}(S_2/S_2)p^{(1)}(S_2/S_2)\right\}}{p^{(0)}(S_2/S_2)}=0{,}009801.$$

Среднее время возвращения объекта в состояние S_2 определим по формуле (13)

$$\mu(S_2)=1\cdot f^{(1)}(S_2/S_1)+2\cdot f^{(2)}(S_2/S_2)+$$
$$+3\cdot f^{(3)}(S_2/S_2)+4\cdot f^{(4)}(S_2/S_2)=1\cdot 2+2\cdot 0{,}01+3\cdot 0{,}0099+4\cdot 0{,}009801=$$
$$=2\cdot 0{,}01+\sum_{l=3}^{\infty}(0{,}99)^{l-1}0{,}01\cdot l$$

Стационарные вероятности состояний S_1 и S_2 определим из (14) и (15):

$$\pi(S_1)=\pi(S_1)p(S_1/S_1)+\pi(S_2)p(S_1/S_2),$$
$$\pi(S_1)+\pi(S_2)=1,$$
$$\pi(S_1)=\pi(S_1)p(S_1/S_1)+\big(1-\pi(S_1)\big)p(S_1/S_2),$$

$$\pi(S_1)=\frac{p(S_1/S_2)}{1-p(S_1/S_1)+p(S_1/S_2)}=\frac{1}{1-0,99+1}=\frac{1}{1,01}=0,99(0099);$$
$$\pi(S_2)=0,00(9901).$$

Среднее время $\mu(S_2)$ можно определить следующим образом

$$\mu(S_2)=\frac{1}{\pi(S_2)}=\frac{1}{0,00(9901)}\approx 100,91.$$

Нестационарная марковская модель процесса технической эксплуатации

Пусть матрицы переходных вероятностей имеют вид:

$$p_1^{NS}=\begin{pmatrix}0,99 & 0,01\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ p_2^{NS}=\begin{pmatrix}0,98 & 0,01\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$
$$p_3^{NS}=\begin{pmatrix}0,97 & 0,03\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ p_4^{NS}=\begin{pmatrix}0,96 & 0,04\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

То есть поведение объекта описывается НСМЦ.

Определим вероятности попадания объекта в состояния S_1 и S_2 за 4 шага:

$$p^{(1)}(S_1/S_2,1)=1,$$
$$p^{(1)}(S_2/S_2,1)=0,$$
$$p^{(2)}(S_1/S_2,2)=p^{(1)}(S_1/S_2,1)p(S_1/S_1,2)+p^{(1)}(S_2/S_2,1)p(S_1/S_2,2)=1\cdot 0,98=0,98;$$
$$p^{(2)}(S_2/S_2,2)=1-0,98=0,02;$$
$$p^{(3)}(S_2/S_2,3)=p^{(2)}(S_2/S_2,2)p(S_1/S_1,3)+$$
$$+p^{(2)}(S_2/S_2,2)p(S_1/S_2,3)=0,98\cdot 0,97+0,02\cdot 1=0,9706;$$
$$p^{(3)}(S_2/S_2,3)=1-0,9706=0,0294;$$
$$p^{(4)}(S_1/S_2,4)=p^{(3)}(S_1/S_2,3)p(S_1/S_1,4)+$$
$$+p^{(3)}(S_2/S_2,3)p(S_1/S_2,4)=0,9706\cdot 0,96+0,0294\cdot 1=0,961176;$$
$$p^{(4)}(S_2/S_2,4)=1-p^{(4)}(S_1/S_2,4).$$

Вычислим вероятности того, что в начавшемся в состоянии S_1 процессе первое попадание в S_2 произойдет на $l=\overline{1,4}$ шаге:

$$f^{(1)}(S_2/S_2,1)=\frac{p^{(1)}(S_2/S_2,1)}{p^{(0)}(S_2/S_2,0)}=0;$$
$$f^{(2)}(S_2/S_2,2)=\frac{p^{(2)}(S_2/S_2,2)-f^{(1)}(S_2/S_2,1)p^{(1)}(S_2/S_2,1)}{p^{(0)}(S_2/S_2,0)}=0,02;$$
$$f^{(3)}(S_2/S_2,3)=\frac{\left\{p^{(3)}(S_2/S_2,3)-f^{(1)}(S_2/S_2,1)p^{(2)}(S_2/S_2,2)-f^{(2)}(S_2/S_2,2)p^{(1)}(S_2/S_2,1)\right\}}{p^{(0)}(S_2/S_2,0)}=0,0294;$$
$$f^{(4)}(S_2/S_2,4)=\left\{p^{(4)}(S_2/S_2,4)-f^{(1)}(S_2/S_2,1)p^{(3)}(S_2/S_2,3)-\right.$$
$$\left.-f^{(2)}(S_2/S_2,2)p^{(2)}(S_2/S_2,2)-f^{(3)}(S_2/S_2,3)p^{(1)}(S_2/S_2,1)\right\}/p^{(0)}(S_2/S_2,0)=0,0306.$$

Среднее время возвращения объекта в состояние S_2 можно определить по формуле (23). Таким образом, показана принципиальная возможность описания простейших процессов технической эксплуатации авионики с помощью стационарных и нестационарных марковских цепей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Air Transport Association Handbook, 1990.

2. Определение терминов ИКАО, используемых в Конвенции о международной гражданской авиации, Приложениях к ней, а также правилах аэронавигационного обслуживания. DOC 9569, 1991.

3. Кузнецов С.В. Анализ структуры современных комплексов и система авионики воздушных судов гражданской авиации // Научный Вестник МГТУ ГА, серия Авионика. - 1998. - № 3. - С. 5-26.

4. Воробьев В.Г., Зыль В.П., Кузнецов С.В. Основы теории технической эксплуатации ПНО. - М.: Транспорт, 1999.

5. Кузнецов С.В. Определение аналитических функций интенсивности отказов и вероятности безотказной работы пилотажно-навигационного оборудования по статистическим данным // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2012. - № 185. - С. 19 – 26.

PROCESSES AND SYSTEMS OF AVIONICS TECHNICAL OPERATION AS MARKOV CHAIS MATHEMATICAL MODELS

Kuznetsov S.V.

Technical operation of the aircraft and its avionics is investigated as a process with the succession of states of operation. The models of the processes and systems of technical operation of avionics in the form of stationary and non-stationary Markov chains of the first and higher order are proposed. There are examples of the processes for two states of operation – able to work and disabled states.

Key words: mathematical models, processes and systems, technical operation, avionics, Markov chains.

Сведения об авторе

Кузнецов Сергей Викторович, 1954 г.р., окончил МИИГА (1977) и МГУ им. М.В. Ломоносова (1980), член-корреспондент Академии наук авиации и воздухоплавания, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технической эксплуатации авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов МГТУ ГА, автор более 200 научных работ, область научных интересов – техническая эксплуатация пилотажно-навигационного оборудования и авионики.